An Introduction to p-adic Teichmüller Theory

望月 新一

1 The Stack of Nilcurves

1.1 複素幾何からの motivation

本節については [Ord], Intro を参照。

X を $\mathbb{C}$ 上の hyperbolic curve (smooth, proper, connected, genus g minus r points $2g-2+r \geq 0$)、$\mathcal{X}$ を付随するリーマン面とする。基本群 $\pi_1(\mathcal{X})$ が普遍被覆 $\tilde{\mathcal{X}}$ に作用する。

$$\boxed{\text{Koebe の一意化定理} \qquad \tilde{\mathcal{X}} \cong \mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}}$$

Remark 1.1. Mumford-Schottky 一意化とは違う。

問題：これの p 進類似 がほしい。

p 進的に扱うために上の定理の代数的な部分を取り出す。

$$\pi_1(\mathcal{X}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

から（$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}$ の正則自己同型群全体とみなせる）

$$(\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})/\pi_1(\mathcal{X}) \to \tilde{\mathcal{X}}/\pi_1(\mathcal{X})$$

を得る。この代数化を

$$P \to X$$

とする。

$$\mathfrak{H} \cong \tilde{\mathcal{X}} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

より section $\sigma : X \to P$ と接続 ∇_P が定まり、

$$\boxed{\text{小平-Spencer morphism} \qquad \nabla_P(\sigma) : \tau_X \xrightarrow{\sim} \sigma^* \tau_{P/X}}$$

は同型となる。このような (P, ∇_P) を固有束（indigenous bundle, ＩＢ）という。ＩＢ全体は $H^0(X, \omega_X^{\otimes 2})$ 上の torsor になっている（$r = 0$ のとき）:

$$\bar{\mathcal{S}}_{g,r} \to \bar{\mathcal{M}}_{g,r}$$

は $\Omega^{\log}_{\bar{\mathcal{M}}_{g,r}}$-torsor。ここで、$\bar{\mathcal{S}}_{g,r}$, $\bar{\mathcal{M}}_{g,r}$ はそれぞれ stable curve+IB, type(g,r) stable curve の moduli 空間。Koebe の一意化から標準的（canonical）な実解析的な切断が定まる：

$$\begin{tikzcd} (\bar{\mathcal{S}}_{g,r})_{\mathbb{C}} \arrow[r] & (\bar{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbb{C}} \arrow[l, dotted, bend right, "s_H"'] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{これの } p \text{ 進類似がほしい}}$

1.2 固有束の基本的性質

詳しくは [Ord], Ch.I, §1,2 を参照。

1.2.1 定義

$f : X \to S$ を proper, smooth, genus g curve の族とする（簡単のため $r = 0$)。

Definition 1.2. $(P \xrightarrow{\pi} X, \nabla_P)$ が固有束（ＩＢ）であるとは、接続付き $\mathbb{P}^1$-バンドルであって、ある切断 $\sigma : X \to P$ が存在して $\nabla_P(\sigma) : \tau_X \to \sigma^*\tau_{P/X}$ が同型であることをいう。

Remark 1.3. つまり local には一意化になっているということ。

1.2.2 Filtration & de Rham cohomology

$\mathcal{A} = \mathrm{Ad}(P) = \pi_*\tau_{P/X}$ とおく。これは X 上のランク 3 のベクトル束で、局所的に $\mathfrak{sl}_2$ と同型な Lie 環の構造をもつ。次の図式

$$\begin{tikzcd} \pi_*(\tau_{P/X}) \arrow[r, two heads, "i"] & \sigma^*\tau_{P/X} \cong \tau_X \\ \mathrm{Ker}\, i \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "j"] & (\mathcal{I}_\sigma/\mathcal{I}_\sigma^2) \otimes \tau_{P/X} \cong \mathcal{O}_X \\ \mathrm{Ker}\, j \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong"] & (\mathcal{I}_\sigma^2/\mathcal{I}_\sigma^3) \otimes \tau_{P/X} \cong \omega_X \end{tikzcd}$$

から $\mathcal{A}$ の filtration が誘導される：

$$(F^{-1}/F^0)(\mathcal{A}) = \tau_X, (F^0/F^1)(\mathcal{A}) = \mathcal{O}_X, (F^1/F^2)(\mathcal{A}) = \omega_X.$$

したがって、$\mathbb{R}^{\bullet} f_{\mathrm{DR},*}(\mathcal{A}, \nabla_{\mathcal{A}})$ に filtration が誘導される。

Proposition 1.4. $i \neq 1$ のとき、

$$\mathbb{R}^i f_{\mathrm{DR},*}(\mathcal{A}, \nabla_{\mathcal{A}}) = 0.$$

$i = 1$ のとき次の完全系列がある*:*

$$0 \to f_* \omega_X^{\otimes 2} \to \mathbb{R}^1 f_{\mathrm{DR},*}(\mathcal{A}, \nabla_{\mathcal{A}}) \to \mathbb{R}^1 f_* \tau_X \to 0.$$

第一項（第二項、第三項）はＩＢとしての変形（(P, ∇_P) の変形、X の別の変形のＩＢとなる変形）を計る。第二項から第三項への写像は *curve* の変形であって (P, ∇_P) がその変形上ＩＢとなるものを対応させる。

1.2.3 Formal uniformization

次の図式を見る。同型写像は ∇_P の形式積分による ; σ はＩＢを定義するときに現れる section 。

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^* P \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & \pi_2^* P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& X \overset{\mathrm{PD}}{\times_S} X \arrow[ul, bend left, "\pi_1^*\sigma"] \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & & P \arrow[dl] \\
X & & X &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}$ を π_2 による $\mathcal{O}$ の push-forward とする。合成をとると下の点線の射ができる：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "d"] \arrow[drr, "\sigma"] & & \\
Spec\,\mathcal{D} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & P \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

ここで d は diagonal $X \hookrightarrow X \overset{\mathrm{PD}}{\times_S} X$ からくるもの。これから、形式一意化が得られる：

$$\hat{\mathcal{O}}_P^{\mathrm{PD}@\sigma} \overset{\xi}{\underset{\sim}{\to}} \mathcal{D}.$$

同型であることは、

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}_\sigma / \mathcal{I}_\sigma^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{I}_{\mathcal{D}} / \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^2 \arrow[d, equal] \\
\sigma^* \omega_{P/X} \arrow[r, "\cong"] & \omega_X
\end{tikzcd}$$

からわかる。ここで下の同型は小平-Spencer から。

Corollary 1.5.

$$P \cong \mathbb{P}(\mathcal{I}_{\mathcal{D}}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{[3]})$$

つまり、ＩＢは ∇_P で決まる。

Proof.

$$\begin{aligned} P &\cong \mathbb{P}(\mathcal{I}_\sigma/\mathcal{I}_\sigma^{[3]}) && (\mathbb{P}^1\text{-bundle の tautology}) \\ &\cong \mathbb{P}(\mathcal{I}_{\mathcal{D}}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{[3]}) && (\text{formal uniformization より}) \end{aligned}$$

□

Corollary 1.6.

$$\{\text{ ＩＢ全体 }\} = (f_*\omega_X^{\otimes 2})\text{-}torsor$$

Proof.

$$\begin{CD} 0 @>>> \mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{[2]}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{[3]} @>>> \mathcal{I}_{\mathcal{D}}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{[3]} @>>> \mathcal{I}_{\mathcal{D}}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{[2]} @>>> 0 \\ @. @A{\cong}AA @. @A{\cong}AA \\ @. \omega_X^{\otimes 2} @. @. \omega_X \end{CD}$$

∇_P, ∇'_P を二つの接続とすると、$\nabla_P - \nabla'_P \in F^0(\mathrm{Ad}(\mathcal{I}_{\mathcal{D}}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{[3]})) \otimes \omega_X$。$\nabla_P, \nabla'_P$ を付随する ξ が id となるように採ることにより、実は $\in F^1(\mathrm{Ad}(\mathcal{I}_{\mathcal{D}}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{[3]})) \otimes \omega_X = \omega_X^{\otimes 2}$。 □

1.3 正標数での理論

詳しくは [Ord], Ch.II, §2 を参照。

1.3.1 Motivation

$\mathcal{M}_{ell}$ を楕円曲線の $\mathbb{Z}_p$ 上の stack、$E \xrightarrow{f} \mathcal{M}_{ell}$ を tautological 楕円曲線、$\mathcal{E} = \mathbb{R}^1 f_{DR,*}\mathcal{O}_E$ とする。$\mathcal{E}$ は $\mathcal{M}_{ell}$ 上のランク 2 のベクトル束で $\nabla_{\mathcal{E}}$ を Gauss-Manin 接続とする。ここで $P = \mathbb{P}, \nabla_P = \mathbb{P}(\nabla_{\mathcal{E}})$ とおくと (P, ∇_P) はＩＢになる（$\mathbb{C}$ 上でも <u>標準的ＩＢ</u> になる)。一方、p 進的には、Frobenius の作用がある。ここではしかし naive な Frobenius では十分でないため renormalized Frobenius $\mathbb{F}^*$ を用いる（詳しくは Main Theorem II を参照)。

$$\boxed{\text{Frobenius invariance } \mathbb{F}^*(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}}) \cong (\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}}) \quad \mathbb{F}^*(P, \nabla_P) \cong (P, \nabla_P)}$$

が成り立ち、この性質により「標準的」なものを探す上での大きなヒントが得られる：

$$\boxed{(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}}) \text{ の } \underline{p\text{-curvature}} \text{ は } \underline{\text{square nilpotent}}}$$

Remark 1.7. p-curvature とは $\mathrm{Ad}(\mathcal{E}) \otimes \Phi^*_{\mathcal{M}_{ell}} \omega_{\mathcal{M}_{ell}}$ の元で、δ が derivation なら δ を $\nabla_{\delta^p} - (\nabla_\delta)^p$ にうつす。

1.3.2 Nilcurves の stack

Nilcurve の stack $\overline{\mathcal{N}}_{g,r}$ とは hyperbolic curve とＩＢの組であって p-curvature が square nilpotent になる部分とする：

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{N}}_{g,r} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & (\overline{\mathcal{S}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p} \arrow[d] \\ & (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p} \end{tikzcd}$$

Theorem 1.8 (Main Theorem I).

$$\bar{\mathcal{N}}_{g,r} \to (\bar{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p}$$

は *finite, flat, local complete intersection, degree*=p^{3g-3+r}。

つまり、up to isogeny ではこれが標準的な section となっている。

1.3.3 定理の証明

(a)

$$\begin{tikzcd} (\bar{\mathcal{S}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p} \arrow[rr, "\mathcal{V}"] \arrow[dr] & & \bar{\mathcal{Q}}_{g,r} = \mathbb{V}(\Phi^* \Omega^{\log}_{\bar{\mathcal{M}}_{g,r}}) \arrow[dl] \\ & (\bar{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p} & \end{tikzcd}$$

斜めの写像はどちらも $(3g-3+r)$-dim relative affine space。$\mathcal{V}$ はＩＢ上の Verschiebung(下の一行目で定義)。$\bar{\mathcal{C}} \xrightarrow{f} \bar{\mathcal{M}}_{g,r}$ を universal curve とする。

$$\begin{aligned} (P, \nabla_P) \mapsto & -\det(p\text{-curvature} \in \mathrm{Ad}(P) \otimes \Phi^*_X \omega_{X/S}) \\ & = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(p\text{-curvature}^2) \in f_* \Phi^*_X \omega^{\otimes 2}_{X/S} \text{ かつ } X/S\text{-horizontal} \\ & \Rightarrow \in \Phi^*_S (f_* \omega^{\otimes 2}_{X/S}) \\ & \Rightarrow \overline{\mathcal{N}}_{g,r} = \mathcal{V}^{-1}(0) \end{aligned}$$

したがって定理を示すには、X_i たちを $(\bar{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p}$ 上の relative affine 座標とするとき、

$$\mathcal{V} : X_i \mapsto X_i^p + (\deg < p) \qquad i = 1, \ldots, 3g-3+r$$

つまり、$\deg \leq p$ かつ主要項が自然な射 $\Phi^*\Omega \to \mathbb{S}^p\Omega$ であることをいえばよい。それには

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(p\text{-curvature}^2) \text{ を計算すればよい}$$

(b)

(P, ∇_P) を I B とすると P はいつも同じだから

$$\nabla_P = \nabla + \theta$$

∇ は固定されたもので、$\theta \in F^1(\mathrm{Ad}(P))$ が動く部分とできる。つまり、$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\{(\nabla+\theta)^p\}^2)$ を θ の関数として計算し、$\deg \leq p$、主要項が上のようである、ことを示せばよい。

(c)

まずは、$(\nabla+\theta)^p$ を考える。$\underline{\theta^2 = 0}$ を使うと、θ が一番多い項は

$$\theta\nabla\theta\ldots\theta\nabla\theta \text{ と } \nabla\theta\nabla\ldots\nabla\theta\nabla$$

前者は二乗したら、0 になるので

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{(\nabla+\theta)^p\}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\theta\nabla\theta\ldots\theta\nabla\theta\nabla\theta\ldots\theta\nabla) + (\deg_\theta < p)$$

より $\deg_\theta \leq p$.

(d)

$\theta^2 = 0$ に注意すると

$$\theta\nabla\theta\nabla\theta\ldots\theta\nabla\theta\nabla = [\theta,\nabla]^{p-1}\theta\triangle$$

ところが、$[\theta,\nabla]$ は $\mathcal{O}_X$-linear かつ、$\in F^0(\mathrm{Ad}(P))$。したがって、$[\theta,\nabla]^{p-1}\theta$ も $\mathcal{O}_X$-linear かつ $\in F^1(\mathrm{Ad}(P))$。しかも、∇ の F^{-1}/F^0 部分は $\mathcal{O}_X$-linear。小平-Spencer 写像が id であることを使うと、

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\ldots) = (\mathrm{abs.const})\theta^p + (\deg_\theta \leq p)$$

と表せる。後は abs.const の計算。これは node や marked point のモノドロミーを計算すればよい : (M = モノドロミー作用素)

$$\begin{aligned}
&(t\frac{d}{dt}\text{を作用させると})p\text{-curvature} = M^p - M = M((\det M)^{\frac{p-1}{2}} - 1) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}Tr(p\text{-curvature}^2) = -\det(M)((\det M)^{\frac{p-1}{2}} - 1)^2 \\
&\Rightarrow \deg_\theta = \deg_{\det M} = p
\end{aligned}$$

□

2 Canonical p-adic Liftings

2.1 Ordinary nilcurves の canonical liftings

詳しくは [Ord], Ch.II, §3; Ch.III を参照。

$$\overline{\mathcal{N}}_{g,r} \supseteq (\overline{\mathcal{N}}^{\mathrm{ord}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p} = \{\bar{\mathcal{M}}_{g,r}\text{上 étale locus}\} \neq \varnothing$$

を考える。これを ordinary nilcurves とよぶ。Jacobian が ordinary とは違う。“ordinary” のもう一つの定義を与えよう。$X \to S$, (P, ∇_P) を $\mathbb{F}_p$ 上の nilcurve とし、Φ で Frobenius を表す。

$$\begin{aligned}
&p\text{-curvature} \in \mathrm{Ad}(P) \otimes \Phi_X^* \omega_{X/S} \\
&\Rightarrow \Phi_X^* \tau_{X/S} \to \mathrm{Ad}(P) \\
&\Rightarrow \Phi_X^* \tau_{X/S} \to \mathrm{Ad}(P) \to (F^{-1}/F^0)(\mathrm{Ad}(P)) = \tau_{X/S}
\end{aligned}$$

より次を得る：

$$\Phi_S^* \mathbb{R}^1 f_* \tau_{X/S} \xrightarrow{\Phi_X^*} \mathbb{R}^1 f_* \Phi_X^* \tau_{X/S} \to \mathbb{R}^1 f_* \tau_{X/S} (= \Theta_{\mathcal{M}_{g,r}}|_S).$$

Theorem 2.1.

$$(X \to S, (P, \nabla_P)) \ \textit{ordinary} \Leftrightarrow \Phi_S^* \mathbb{R}^1 f_* \tau_{X/S} \backsimeq \mathbb{R}^1 f_* \tau_{X/S}$$

Proof. 略。だけど

$$\text{étale} \Leftrightarrow \mathcal{N}_{g,r}\text{の tangent space} \backsimeq \mathcal{M}_{g,r}\text{の tangent space}$$

はご納得いただけるはず。 □

2.1.1 ordinary nilcurve の canonical lifting

$X_{\mathbb{F}_p} \to S_{\mathbb{F}_p} \subseteq S = \mathrm{Spec}(W(R)), R$:perfect$/\mathbb{F}_p, \mathcal{P} := (P, \nabla_P)_{\mathbb{F}_p}$ を標数 p の ordinary nilpotent ＩＢとする。これを $(X_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p})$ に canonical に持ち上げたい。

Theorem 2.2 (Main Theorem II). 下記の条件を満たす *unique* な $(X_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p})$ がある。

$$\text{条件}: \mathbb{F}^* \mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p} \backsimeq \mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p}$$

Remark 2.3. $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p}$ を $\mathrm{Crys}(X_{\mathbb{F}_p}/S)$ 上の $\mathbb{P}^1$-bundle の crystal とする。$P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ のとき、$F^1(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$ という rank 1 のベクトル束がＩＢの定義に出てくる σ より決まる。Φ_X を Frobenius とするとき、

$$\Phi_X^* (\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}}) \otimes \mathbb{F}_p \supseteq \Phi_X^* F^1(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{F}_p.$$

renormalized Frobenius による pull-back $\mathbb{F}^*(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}})$ を $\Phi_X^*(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}})$ の section であって、mod p したときに $\Phi_X^* F^1(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{F}_p$ に入るものと定義する。これは rank 2 ベクトル束の crystal になる。$\mathbb{F}^*(\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}})$ はその射影化とする。

まず、変形の様子を思い出す。第一項は F^2、第三項は F^{-1}/F^0 であった。

$$0 \to f_* \omega_{X/S}^{\otimes 2} \to \mathbb{R}^1 f_{DR,*} \mathrm{Ad}(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}^1 f_* \tau_{X/S} \to 0$$

Proof. 図式で考える。下の各表は $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p}$ を表す。すべてが OK になれば証明が終わる。

(1) mod p についてはわかっている。

F^2	F^{-1}/F^0	
OK	OK	mod p
?	?	mod p^2
?	?	mod p^3

Lemma 2.4. $\mathbb{F}^*$ すると

$$\boxed{F^{-1}/F^0} \xrightarrow{\sim} p^{-1} \cdot \boxed{F^{-1}/F^0}$$
$$\boxed{F^2} \to p^2 \cdot \boxed{F^2}$$

Remark 2.5. 証明については [Ord], Ch.III, Lemmas 2.5, 2.6 を参照。

(2) Lemma より $p \cdot \boxed{F^{-1}/F^0} \bmod p^2$ が決定されるので、

F^2	F^{-1}/F^0	
OK	OK	mod p
?	OK	mod p^2
?	?	mod p^3

つまり、$X_{\mathbb{Z}/p^2}$ が決まった。

(3) $F^{-1}/F^0 \bmod p^3$ については、定理の条件の同型から決定される：

F^2	F^{-1}/F^0	
OK	OK	mod p
?	OK	mod p^2
?	OK	mod p^3
?	?	mod p^4

つまり、真上の OK から OK となる。

(4) Lemma より $(\mathbb{F}^*\mathcal{P})_{\mathbb{Z}/p^2}$ は $F^2 \bmod p^2$ によらないので条件よりこれも

決まる。

F^2	F^{-1}/F^0	
OK	OK	mod p
OK	OK	mod p^2
?	OK	mod p^3
?	?	mod p^4

これは (2) と同じような状況になっているので手順を繰り返せばよい。 $\square$

2.2 moduli の場合

詳しくは [Ord], Ch.III を参照。

$(\overline{\mathcal{N}}^{\mathrm{ord}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p} \xrightarrow{\text{ét}} (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbb{F}_p}$ は étale なので unique な p-adic な持ち上げ $\mathcal{N} := (\overline{\mathcal{N}}^{\mathrm{ord}}_{g,r})_{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{\text{ét}} (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbb{Z}_p}$ がある。先ほどの §1 の議論で、$S_{\mathbb{F}_p} := \mathcal{N}^{PF}_{\mathbb{F}_p}$ としておくと、

$$
\begin{aligned}
&X_{\mathbb{Z}_p} \to S = W(\mathcal{N}^{PF}_{\mathbb{F}_p}) \\
&\Rightarrow S \to (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})_{\mathbb{Z}_p} \text{ s.t. } \mathcal{N} \text{ を経由する} \\
&\Rightarrow S \to \mathcal{N}
\end{aligned}
$$

を得る。

Lemma 2.6. $\exists!$ *Frobenius lifting* $\Phi_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ *such that*

$$
\begin{array}{ccc}
S & \longrightarrow & \mathcal{N} \\
\uparrow{\scriptstyle \Phi_S} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi_{\mathcal{N}}} \\
S & \longrightarrow & \mathcal{N}
\end{array}
$$

Corollary 2.7. $\exists!(\Phi_{\mathcal{N}}, (P, \nabla_P))$ *such that* $\mathbb{F}^*(P, \triangle_P) \cong (P, \nabla_P)$.

Remark 2.8. 第 1 章 §1 の s_H の類似である p-adic formal stack 間の写像が得られる：

$$
\begin{tikzcd}
 & (\overline{\mathcal{S}}_{g,r})\hat{}_{\mathbb{Z}_p} \arrow[d] \\
\mathcal{N} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (\overline{\mathcal{M}}_{g,r})\hat{}_{\mathbb{Z}_p}
\end{tikzcd}
$$

Remark 2.9. $\mathbb{C}$ の場合（Bers 一意化）と同様、$\Phi_{\mathcal{N}}$ は $\mathcal{N}$ 上の標準的な座標を与える！(Serre-Tate と類似的ながら Torelli に関して compatible ではない)。

Remark 2.10. $\Phi_{\mathcal{N}}$ のような Ordinary Frobenius lifting は実解析的ケーラー計量の p 進類似である。

	p-adic	$\mathbb{C}$
hyperbolic curves	p-adic Teichmüller	Weil-Petersson metric
abelian varieties	Serre-Tate	Siegel upper half-plane metric

2.3 Galois 表現

詳しくは [Ord], Ch. IV, V を参照。

2.3.1 k perfect, char p のとき

$X \to S = \mathrm{Spec}(W(k)); (P, \nabla_P)$ を canonical lifting とする。P 上には Hodge filtration、connection ∇_P、Frobenius action $\mathbb{F}^*(P, \nabla_P) \cong (P, \nabla_P)$ が入るので、Faltings の $\mathcal{MF}^{\nabla}(X)$ の object になる。Faltings の理論を適用すると canonical な crystalline Galois representation ができる：

$$\boxed{\rho_X : \pi_1(X_{\mathbb{Q}_p}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)}.$$

Remark 2.11. 第 1 章 § 1 $\mathbb{C}$ の場合の $\pi_1(X_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ を参照。

2.3.2 moduli のとき

$S = W(\mathcal{N}^{PF}_{\mathbb{F}_p})$ としたとき、同様に Galois representation ができるが、実はもっと <u>小さい base</u> の上で定義されている。$\mathcal{N}^{\infty} := \varprojlim(\cdots \to \mathcal{N} \overset{\Phi_{\mathcal{N}}}{\to} \mathcal{N} \overset{\Phi_{\mathcal{N}}}{\to} \cdots \overset{\Phi_{\mathcal{N}}}{\to} \mathcal{N})$ とすると、Faltings の理論より、

$$\boxed{\rho_{X_{\mathcal{N}^{\infty}}} : \pi_1(X_{\mathcal{N}^{\infty}} \otimes \mathbb{Q}_p) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)}$$

Remark 2.12.

$$(\mathcal{N}^{\infty})\hat{} = W(\mathcal{N}_{\mathbb{F}_p})$$

$\mathcal{N}^{\infty}$ は formal なもの。これを自然にあるもので解釈したい。

$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{g,r})_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{X} \to \mathcal{M}$ universal curve とする。Outer hom を考える：

$$\begin{gathered} 1 \to \pi_1(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}) \to \pi_1(\mathcal{X}) \to \pi_1(\mathcal{M}) \to 1 \\ \Rightarrow \pi_1(\mathcal{M}) \text{ acts on} \, \mathrm{Rep}(\pi_1(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)) \end{gathered}$$

π_1 の一般論より無限次被覆 $\boxed{\mathcal{R} \to \mathcal{M}}$ ができる。今、$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}$ を p-adic formal stack と見て $\mathcal{R}$ 内の <u>normalization</u> をとると、$\mathcal{R}_{\mathbb{Z}_p} \to \mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}$ ができ、$\rho_{\mathcal{X}_{\mathcal{N}^{\infty}}}$ より次の系ができる。

Corollary 2.13. *p-adic open immersion*

$$\mathcal{N}^{\infty} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{Z}_p}$$

ができる。

Remark 2.14. 楕円曲線の場合は Katz-Mazur を参照。

2.3.3 Crystalline induction

$\mathcal{N}^{\infty} \to \mathcal{N}$ は $\mathbb{Z}_p(1)^{3g-3+r}$-covering なので $\rho_{X_{\mathcal{N}^{\infty}}} : \pi_1(X_{\mathcal{N}^{\infty}} \otimes \mathbb{Q}_p) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$ を（表現論の意味で）induction すると

$$\boxed{\rho_{X_{\mathcal{N}}} : \pi_1(X_{\mathcal{N}} \otimes \mathbb{Q}_p) \to \mathrm{PGL}_2(\text{大きな環})}$$

ができる。実は、これも “crystalline”。つまり、

$$\boxed{\begin{tikzcd} \mathcal{MF}^{\nabla} \arrow[r] & \text{Galois representation} \\ \text{Crystalline induction} \arrow[r] \arrow[u, bend left] & \text{representation の induction} \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}}$$

Crystalline induction をすると、$\rho_{X_{\mathcal{N}}}$ を発生する（大きな）$\mathcal{MF}^{\nabla}$-object が作れる。

3 Irreducibility of Moduli

3.1 Admissible locus の affine 性

詳しくは [Ord], Ch.II, §2; [Fnd], Ch.III, §2 を参照。

$X \xrightarrow{f} S/\mathbb{F}_p$ genus g curve の族; (P, ∇_P) nilpotent ＩＢとする。p-curvature は $\mathrm{Ad}(P) \to \Phi^* \omega_{X/S}$ で与えられる。

Definition 3.1. Nilcurve が <u>admissible</u> とは、p-curvature が全射であること。Admissible locus は open substack になる : $\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{\mathrm{adm}} \subseteq \overline{\mathcal{N}}_{g,r}$.

今、

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^1 f_{\mathrm{DR},*}(\mathrm{Ad}(P)) \arrow[r] & \mathbb{R}^1 f_{\mathrm{DR},*}(\Phi^* \omega_{X/S}) \arrow[d] \\ & \Phi_S^* f_*(\omega_{X/S}^{\otimes 2}) \end{tikzcd}$$

（縦の射は Cartier operator）。

Lemma 3.2. 合成が全射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ad}(P) \to \Phi^* \omega_{X/S}$ が全射

Proof. Riemann-Roch の定理から従う。例えば、$\Rightarrow$ は零点が有ったら、合成は全射でない。 $\square$

Corollary 3.3. $\overline{\mathcal{N}}_{g,r} \ni \nu$ に対して、

$$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{\mathrm{adm}} \ni \nu \Leftrightarrow \mathcal{N}_{g,r} \textit{ smooth over } \mathbb{F}_p \textit{ at } \nu$$

Proof. 定義より、

$$\begin{aligned} &(\text{Cor の左辺}) \Leftrightarrow (\text{Lem の右辺}) \\ \Leftrightarrow &(\text{Lem の左辺}) \Leftrightarrow (\text{Cor の右辺}) \end{aligned}$$

$\square$

Remark 3.4. 従って、ordinary(=étale locus) は admissible。（難しい定理だけど）実は、generic admissible は ordinary。

次の定理を示す。

Theorem 3.5. $\overline{\mathcal{N}}_{g,r} \supseteq \overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{\mathrm{adm}}$ は *(quasi-)affine*。

Proof. (P, ∇_P) を nilpotent admissible ＩＢとするとき、Hasse invariant の類似 h_X がある：$\omega_{X/S} = F^1(\mathrm{Ad}(P) \hookrightarrow \mathrm{Ad}(P) \twoheadrightarrow \Phi_X^* \omega_{X/S}$。$\{h_X \neq 0\} \overset{open}{\subseteq} X$ を curve の ordinary locus といい、$\Sigma := \{h_X^{\frac{1}{2}} = 0\} \overset{closed}{\subseteq} X$ を curve の supersingular locus という。このとき、$\Sigma \to S$ は (finite) étale である。証明は classical な場合の Igusa's thm と同様。

$\mathrm{Ad}(P) \twoheadrightarrow \Phi_X^* \omega_{X/S}$ は square nilpotent であることより、"conjugate filtration" ができる：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ad}(P) \arrow[r, two heads, "i"] & \Phi_X^* \omega_{X/S} & \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathrm{Ker}\, i \arrow[u] \arrow[r, two heads, "j"] & \mathcal{O}_X & \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & -* \end{pmatrix} \\ \mathrm{Ker}\, j \arrow[u] \arrow[r, "\cong"] & \Phi_X^* \tau_{X/S} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

Σ 上では、$\omega_{X/S} \subseteq \mathrm{Ad}(P)$ が nilpotent より $\omega_{X/S}|_\Sigma \to \mathcal{O}_X|_\Sigma$ はゼロになる。よって $\omega_{X/S}|_\Sigma \to \Phi_X^* \tau_{X/S}|_\Sigma = \tau_{X/S}^{\otimes p}|_\Sigma$ を得るが、これは classical な supersingular elliptic curve のときと同様、至る所 nonzero な $\Gamma(\Sigma, \tau_{X/S}^{\otimes(p+1)}|_\Sigma)$ の元を与える。ところが、$\Sigma \to S$ は finite étale かつ $\omega_{X/S}|_\Sigma$ は ample、よって定理が示された。 $\square$

3.2 Dormant locus の smooth 性

詳しくは [Fnd], Ch.II, Ch.III, §1 を参照。

$X \xrightarrow{f} S/\mathbb{F}_p$ genus g curve の族; (P, ∇_P) nilpotent ＩＢとする。p-curvature は $\mathrm{Ad}(P) \to \Phi^*\omega_{X/S}$ で与えられる (horizontal)。

Definition 3.6. Nilcurve が <u>dormant</u> とは、p-curvature$\equiv 0$。Dormant locus を $\overline{\mathcal{N}}_g[\infty]$ で表す。$\overline{\mathcal{N}}_g[\infty] \overset{closed}{\subseteq} \overline{\mathcal{N}}_g$ である。

Dormant と仮定すると、p-curvature の一般論より、次のような $\mathbb{P}^1$-bundle が存在する：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Q \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\Phi_{X/S}"'] & X^F \end{tikzcd}$$

かつ $\{P$ の horizontal sections$\}$=$\{Q$ の sections$\}$. 従って、$S = V(I) \subseteq T, I^2 = 0$ とすると、$X \to S$ の持ち上げ $X_T \to T$ に対して、X_T^F は持ち上げによらない（なぜなら、$I^p = 0$ より $\mathcal{O}_T \overset{()^p}{\to} \mathcal{O}_T$ は $\mathcal{O}_S$ を経由するから）。$Q \to X^F$ の勝手な持ち上げ $Q_T \to X_T^F$ に対して、$P_T := (\Phi^*_{X_T/T} Q_T) \to X_T$ は接続 ∇_{P_T} つき $\mathbb{P}^1$-bundle となり、しかも $\mathrm{Crys}(X/T)$ 上の crystal として $\boxed{X_T\text{によらない}}$。一方、$P \to X$ の <u>変形</u> であるから、$\mathbb{R}^1 f_{\mathrm{DR},*}(\mathrm{Ad}(P)) \to \mathbb{R}^1 f_*(\tau_{X/S})$ が全射であることより、$(P_T \to X_T, \nabla_{P_T})$ が X_T 上のＩＢとなるような $X_T \to T$ が unique に存在することがわかる。因みに、勝手な変形 $Q_T \to X_T^F$ から出発したわけだし、Riemann-Roch より、

$H^0(X_F, \mathrm{Ad}(Q)) = 0$	bundle の autom.
$H^1(X_F, \mathrm{Ad}(Q)) = (\mathrm{rank}\, 3g-3)$	変形の moduli
$H^2(X_F, \mathrm{Ad}(Q)) = 0$	変形の obstruction

よって、

Theorem 3.7. $\overline{\mathcal{N}}_g[\infty]$ は *smooth* で $\dim \overline{\mathcal{N}}_g[\infty] = \dim \overline{\mathcal{N}}_g = 3g-3$。

Remark 3.8. Admissible locus(cf. §1, Cor) を $\mathcal{N}_g[0]$ で表す。0 と ∞ の間に中間的な $\mathcal{N}_g[d]$(spiked locus) も有り、$\mathcal{N}_g = \coprod_{d=0}^{\infty} \mathcal{N}_g[d]$ となる。証明はもう少し難しくなるが、$\mathcal{N}_g[d]$ は全部 smooth。

3.3 p-adic Teichmüller theory による moduli の既約性

Theorem 3.9. $p \gg g$ なら $(\mathcal{M}_g)_{\mathbb{F}_p}$ は既約。

Remark 3.10. $\mathbb{C}$ 上の Teichmüller theory の一番基本的な応用の一つはまさにこの既約性である。

Proof. g に関する帰納法。「任意の connected component $I \subseteq (\mathcal{M}_g)_{\mathbb{F}_p}$ は <u>proper</u> にならない。」を示せば十分（boundary は低い g の $\mathcal{M}_g$ で書ける）。I proper とする。$\mathcal{N}_g|_I \to I$ を考える。$\mathcal{N}_g|_I$ の generic point η に対し $d_\eta :=$ ($\eta \in \mathcal{N}_g[d_\eta]$ となるもの）とおく。d_η が最大となるような η をとってきてその <u>closure</u> $J := \overline{\{\eta\}} \subseteq \mathcal{N}_g|_I$ を考える。

<u>Claim 1</u> J は proper, smooth, $\subseteq \mathcal{N}[d_\eta]$.

Proof. Proper は定義よりただちに従う。ある d に対し、$\nu \in J \cap \mathcal{N}_g[d]$ とすると、ν が η の specialization であることより、$d \geq d_\eta$。$\mathcal{N}_g[d]$ が smooth であることと、d_η が最大であることより $d = d_\eta$、よって $\nu \in J \cap \mathcal{N}_g[d_\eta] \subseteq \mathcal{N}_g[d_\eta]$。従って、$J \overset{closed}{\subseteq} \mathcal{N}[d_\eta]$。右辺は smooth で次元は $3g-3$、また、J の次元も $3g-3$ なので J も至るところ smooth。 □

<u>Claim 2</u> $d_\eta \neq 0$

Proof. $d_\eta = 0$ とすると、Theorem 3.5 より $\mathcal{N}_g[0]$ は quasi-affine だったから、その closed subset J も quasi-affine。一方、J は proper だったから、quasi-affine でもあるとすると、$\mathbb{F}_p$ 上 finite になり、$\dim J = 3g-3 \neq 0$ に矛盾。 □

従って、Corollary 3.3 より、$\mathcal{N}_g$ は η では reduced でない (reduced とすると、J の general な点では、$\mathcal{N}_g$ は $\mathbb{F}_p$ 上 smooth。そのような点は $\mathcal{N}_g[0]$ に属する)。よって下の図の j は finite, flat, deg$< p^{3g-3}$。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_g|_I \arrow[rr, "\text{fin, flat, deg}= p^{3g-3}"] & & I \\
J \arrow[u, hook] \arrow[urr, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

一方、$(\mathcal{S}_g)_{\mathbb{Z}_P} \to (\mathcal{M}_g)_{\mathbb{Z}_P}$ は $\mathcal{M}_g$ 上のある ample line bundle $\mathcal{L}$ に入る connection の torsor。よって、$c_1^{crys}(\mathcal{L})$ は写像

$$H^2_{crys}((\mathcal{M}_g)_{\mathbb{Z}_P}) \to H^2_{crys}((\mathcal{S}_g)_{\mathbb{Z}_P})$$

により $F^2 \subseteq H^2_{crys}((\mathcal{S}_g)_{\mathbb{Z}_P})$ に送られる。いま、$p \gg g, \mathcal{L}$ ample より、$c_1(\mathcal{L})^{3g-3}|_I \in \mathbb{Z}_p^*$ としてもよい。

$$c_1^{crys}(\mathcal{L})^{3g-3}|_J = \deg(J/I)(c_1^{crys}(\mathcal{L})^{3g-3}|_I)$$

左辺は $F^{6g-6}H^{6g-6}_{crys}(J/\mathbb{Z}_p) = p^{3g-3}H^{6g-6}_{crys}(J/\mathbb{Z}_p) = p^{3g-3}\mathbb{Z}_p$ の元であるから、$p^{3g-3} | \deg(J/I)$ となるが、これは $\deg(J/I) < p^{3g-3}$ に矛盾する。 □

参考文献

[Ord] S. Mochizuki. A theory of ordinary p-adic curves. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 32, No. 6, pp. 957-1152, 1996.

[Fnd] S. Mochizuki. *Foundations of p-adic Teichmüller Theory.* AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 11, 1999.

TEX　近藤 智